№1-дәріс

Матрицалар. Матрицаларға амалдар қолдану. Анықтауыштар. 2-ші және 3-ші қатардағы анықтауыштар.

Анықтамалар:

1.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}=(a_{ik})=\|a_{ik}\|$$

түріндегі тіктөртбұрышты кесте $m\times n$ өлшемді матрица немесе $(m\times n)$-матрицасы деп, ал a_{ik}, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$ - матрицаның элементтері деп аталады.

2. Екі $(m\times n)$ - матрицалары тең деп аталады, егер олардың сәйкес элементтері тең болса.

3. Егер $m=n$, онда A матрицасы n-ші ретті квадрат матрица деп аталады.

4. A квадрат матрицасының детерминанты немесе анықтауышы деп $det\ A=|a_{ik}|$ санын айтамыз.

5.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

түріндегі матрица бірлік матрица деп аталады.

Матрицаларға қолданылатын амалдар

1. $m\times n$ өлшемді $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ матрицаларының қосындысы $A+B$ деп

$m\times n$ өлшемді $C=(c_{ik})$матрицасын айтамыз, мұндағы

$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$.

Мысал 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$.

2. $m\times n$ өлшемді $A=(a_{ik})$ матрицасының α санына көбейтіндісі $\alpha\cdot A$ деп $m\times n$ өлшемді $B=(b_{ik})$ матрицасын айтамыз, мұндағы

$b_{ik}=\alpha\cdot a_{ik}$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$.

Мысал 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $3A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}$.

3. $m\times n$ өлшемді $A=(a_{ik})$ матрицасы мен $n\times p$ өлшемді $B=(b_{ik})$ матрицаларының көбейтіндісі $A\cdot B$ деп $m\times p$ өлшемді $C=(c_{ik})$ матрицасын айтамыз, мұндағы $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,p}$.

Мысал 3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9\\ 7 & 10\\ 8 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot6+2\cdot7+3\cdot8 & 1\cdot9+2\cdot10+3\cdot11\\ 4\cdot6+5\cdot7+6\cdot8 & 4\cdot9+5\cdot10+6\cdot11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44 & 62\\ 107 & 152\end{pmatrix}$.

Е с к е р т у.

1. Матрицаларды көбейте аламыз тек сол жағдайда ғана, егер бірінші көбейгіш матрица бағанының саны екінші көбейткіш матрицаның жолының санына тең болса.

1. Егер $A\cdot B$ және $B\cdot A$ көбейтінділері табылса, онда жалпы жағдайда $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Мысал4. $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. AB және BA тап.

$$AB=\begin{pmatrix}3\cdot1+5(-1) & 3(-5)+5\cdot2\\ 1\cdot1+2\cdot(-1) & 1\cdot(-5)+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1\cdot3+(-5)\cdot1 & 1\cdot5+(-5)\cdot2\\ (-1)\cdot3+2\cdot1 & (-1)\cdot5+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

Бұдан, $AB\neq BA$ екенін көруге болады. (Бұл жағдайда матрицалардың көбейтіндісі орын ауыстырымдылық қасиетке бағынбайтындығына көз жеткіземіз).

Мысал 5. $(AB)C$ және $A(BC)$ тап, егер

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -6 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 3 & -2\\ -1 & 9 & -2\\ 9 & 3 & -3\end{pmatrix},\quad (AB)C=\begin{pmatrix}-7\\ 11\\ -15\end{pmatrix} \text{ және } BC=\begin{pmatrix}-10\\ 1\end{pmatrix},\quad A(BC)=\begin{pmatrix}-7\\ 11\\ -15\end{pmatrix}$$

есептей келе, $(AB)C=A(BC)$ көреміз.

Анықтауыштар

Анықтама 1. Қандай да бір ретпен алынған $(1,2,\dots,n)$ сандарынан құралған жиынтық алмастыру деп аталады және $j=(j_1,j_2,\dots,j_n)$ түрінде жазылады.

$(1,2,\ldots,n)$ алмастыруы негізгі деп аталады, ал екі элементтің орнын ауыстырудан пайда болған алмастыру – осы элементтердің транспозициясы деп аталады.

Теорема 1. Егер қандай да бір алмастыру негізгісінен N_1 мен N_2 транпозицияларын қолдану нәтижесінде пайда болған болса, онда N_1 мен N_2 транспозициялары не бірдей жұп, не екеуі де бірдей тақ .

Мысал 1. $(3,2,1)$ алмастыруын негізгісінен келесі транспозицияларды қолдану арқылы алуға болады:

а) $(1,2,3)\Rightarrow(3,2,1)$, яғни, 1 мен 3 элементтерінің орнын ауыстырдық және $N_1=1$,

б) $(1,2,3)\Rightarrow(2,1,3)\Rightarrow(2,3,1)\Rightarrow(3,2,1)$ $N_2=3$.

Бұл жерден N_1 мен N_2 сандарының екеуі де тақ екенін көруге болады.

$j=(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ алмастыруын негізгі алмастырудан алу кезінде қолданылатын транспозициялар санын $t(j)$ деп белгілелік.

Анықтама 2. n-ші ретті анықтауыш немесе детерминант деп

$$\Delta=|a_{ik}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

түрінде жазылған және төмендегідей формуламен есептелінетін санды айтамыз:

$$\Delta=\sum_j(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n} \tag{2}$$

мұндағы қосынды $j=(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ алмастыруының барлық мүмкін әртүрлі мәндері үшін таралған.

(2)-дегі қосылғыштар саны $n!$ тең.

Анықтама 2-ден бірден мына теңдікке көз жеткізуге болады:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Мысалдар: 2) $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot5-(-2)\cdot1=17$

3) $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=3\cdot(-2)-4\cdot0=-6$

4) $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-5)-(-2)\cdot3=5+6=11.$

Ескерту. Егер анықтауыштың элементтері қандай да бір функциялар болса, онда бұл анықтауыш та функция болады(сан болуы да мүмкін).

Мысалы,

5) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

6) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

7) $\begin{vmatrix} tgx & 2 \\ \frac{1}{2} & ctgx \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$.

Анықтама 3. a_{ik} элементінің M_{ik} миноры деп (1)-ден i-ші жол мен k-шы бағанды сызып тастау нәтижесінде пайда болған $n-1$-ші ретті анықтауышты айтамыз. $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ шамасы a_{ik} элементінің алгебралық толықтауышы деп аталады.

8) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ анықтауышы берілген.

a_{23} элементінің сәйкес M_{23}, A_{23} тап.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \cdot (-2) = 5; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -5.$$

III-ші ретті анықтауышты есептеу үшін үшбұрыштар ережесін қолданамыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4(-1) \cdot (-3) - (-3) \cdot 6 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 = 71$$

Анықтауыштың қасиеттері

1. Анықтауыштың мәні

1. өзгермейді, егер оның жолдарын (бағандарын) сәйкес бағандармен (жолмен) алмастырсақ,
2. таңбасын өзгертеді, егер екі жолдың (бағанның) орындарын алмастырсақ,
3. k $(k \neq 0)$ санына көбейтіледі, егер қандай да бір жолдың (бағанның) барлық элементтерін k санына көбейтсек,
4. нөлге тең, егер кез келген жолдың (бағанның) барлық элементтері нөлге тең болса,
5. нөлге тең, егер қандай да бір екі жолдың (бағанның) сәйкес элементтері тең болса немесе пропорционал болса.

6. Кез келген жолдың элементтеріне басқа бір жолдың сәйкес элементтерін қандай да бір нөлге тең емес санға көбейтіп, қосқаннан анықтауыштың мәні өзгермейді.

Анықтауышты есептеу әдістері:

А) жолының (бағанының) элементтері бойынша жіктеу

Қандай да бір жолдың (бағанның) элементтерінің осы элементтің сәйкес алгебралық толықтауышына көбейтінділерінің қосындысы анықтауыштың мәніне тең.

Б) Анықтауыштың бас диагоналінің жоғарғы және төменгі жағында орналасқан элементтердің барлығы нөлге тең болса, ондай анықтауыш үшбұрышты түрге келтірілген анықтауыш деп аталады. Бұл жағдайда анықтауыш бас диагоналдің элементтерінің көбейтіндісіне тең. Кез келген анықтауышты үшбұрышты түрге келтіру үнемі мүмкін.

10) а) 3-ші бағанның элементтері бойынша жіктеу арқылы анықтауыштың мәнін есепте

б) 1-ші жолдың элементтері бойынша жіктеу арқылы анықтауышты есепте

а)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 10 = 2.$$

б) $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Кері матрица

Анықтама 6. A текше матрицасы қайтымды емес немесе ерекше матрица деп аталады, егер $\det A = 0$, кері жағдайда қайтымды немесе ерекше емес матрица деп аталады.

Теорема 1. Егер A - қайтымды матрица болса, онда A^{-1} матрицасы табылады және ол тек біреу ғана болып, төмендегі теңдік орындалады: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, мұндағы E – бірлік матрица.

A^{-1} матрицасы кері матрица деп аталады және төмендегі формула бойынша есептелінеді

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

мұндағы A_{ik}, $i,k=\overline{1,n}$, - A матрицасынының элементтерінің алгебралық толықтауышы.

Мысал 6. A матрицасына кері матрицаны тап.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шешуі. $\det A = 2 \neq 0$ (4 мысалды қара) болғандықтан, A матрицасы қайтымды. Алгебралық толықтауыштарды табамыз:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=8,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{21}=-4,\quad A_{22}=-1,\quad A_{23}=5,\quad A_{31}=-10,\quad A_{32}=-3,\quad A_{33}=11\ .$$

Бұдан

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -4 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрицаның рангі

Анықтама 7. A матрицасының k-ші ретті миноры деп A матрицасының кез келген таңдап алынған k баған мен k жолдың элементтерінен құралған анықтауышты айтамыз.

Мысал 8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ берілген.

Оның 2-ші ретті минорлары

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}$$ және тағы басқалар.

3-ші ретті минорлары

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. Егер k-шы ретті минорлардың барлығы нөлге тең болса, онда k-дан жоғарғы ретті барлық минорлар нөлге тең болады.

Анықтама 8. Матрицаның ***рангі*** $r(A)$ деп нөлге тең емес минордың ең жоғарғы ретін айтамыз, ал кез келген $r(A)$-ші ретті нөлге тең емес минор ***базистік минор*** деп аталады.

Мысал 9. Матрицаларды көмкеру әдісі.

A матрицасында k-ші ретті $M_k \neq 0$ миноры табылды делік. Осы M_k минорын көмкеретін $k+1$-ші ретті минорларды қарастырамыз. Егер ол минорлардың барлығы нөлге тең болса, онда $r(A)=k$. Егер M_k минорын көмкеретін $k+1$-ші ретті минорлардың ішінде тым болмағанда біреуі нөлге тең болмаса, онда осы нөлге тең емес минорды көмкеретін $k+2$-ші ретті минорларды қарастырамыз, т.с.с.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-ші ретті нөлге тең емес минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

белгілейік. Ендеше, $r(A) \geq 2$. Енді M_2-ні көмкеретін нөлге тең емес 3-ші ретті минорды іздейміз. Бұл минор

$$M_3 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{23} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 .$$

Бұдан, $r(A) \geq 3$ екендігі шығады.

Берілген A матрицасының соңғы екі жолы тең болғандықтан, барлық 4-ші ретті минорлар нөлге тең болады. Дербес жағдайы, M_3 минорын көмкеретін минорлар нөлге тең. Ендеше, $r(A) = 3$.

Е с к е р т у. Матрицаның рангі – осы матрицадағы сызықты тәуелсіз жолдардың (бағандардың) санына тең. 20 мысалда бұл сөйлемнің мағынасын былай түсінуге болады: A матрицасының 1,2,3 жолдары сызықты тәуелсіз, ал А матрицасының қалған жолдары (4 жол) 1,2,3 жолдардың сызықтық комбинациясы бойынша өрнектеледі.